154. 定点通過ベクトル場に就ての注意

朝長康郎　（1949.3.25）

本誌第二輯第12号談話125の同じ様な表題の拙論に対して其後 佐々木重夫博士から御注意があったので再論したい。　前回は

可符号，compact，class C' の Riemann 空間には class C' の定点通過ベクトル場は存在しない。

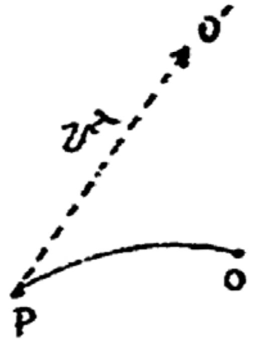
と云ふ定理を述べたのであるが、之は條件が強過ぎるので次の様に緩くすることが出来る。

〔定理〕　complete な Riemann 空間（但 Euklid 空間を除く）には 定点通過ベクトル場は存在しない。

complete の定義は Rinow-Hopf [1] による 即ち 次の互に同等な四つの定義がある。

- (A)　有界集合が compact なこと。
- (B)　発散曲線が 無限大の長さを持つこと。
- (C)　各測地線上に任意の 長さがとれること。
- (D)　基本列が必ず収斂すること。

〔証明〕　定点通過ベクトル場 v^λ があることは



各点に於ける切ユークリッド空間内に定点 O′ が存在して　それを如何なる曲線に沿って展開しても互に重なると云ふことだから、佐々木博士の御注意の如く 或点Pから出る v^λ の方向に向ふ測地線上に $\overline{PO'}$ に等しい距離の点Oが取れれば、OはO′の原像になるわけである。　complete の定義(C)から 点Oは確に存在する。そこで以下は、立花俊一氏〔2〕の論法になるが、Oを原点とする 標準座標 $\{\bar{x}^\lambda\}$ を導入する

v^λ は $-\bar{x}^\lambda$ と表わされ、定点通過だから

$$d\bar{x}^\lambda + \delta(-\bar{x}^\lambda) = d\bar{x}^\lambda + \left\{d(-\bar{x}^\lambda) - \overline{\left\{{\lambda \atop \mu\omega}\right\}}\bar{x}^\mu d\bar{x}^\omega\right\}$$
$$= -\overline{\left\{{\lambda \atop \mu\omega}\right\}}\bar{x}^\mu d\bar{x}^\omega = 0$$

が 任意の $d\bar{x}$ に対して成立たねばならない。故に

$$\left\{\overline{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\omega\end{matrix}}\right\}\bar{x}^{\mu}=0$$

即ち

$$\bar{x}^{\mu}\{\overline{\mu\omega,\lambda}\}=\frac{1}{2}\bar{x}^{\mu}\left(\frac{\partial\bar{g}_{\mu\lambda}}{\partial\bar{x}^{\omega}}-\frac{\partial\bar{g}_{\omega\lambda}}{\partial\bar{x}^{\mu}}-\frac{\partial\bar{g}_{\mu\omega}}{\partial\bar{x}^{\lambda}}\right)=0.$$

λ と ω を交換して加へると

$$\frac{\partial\bar{g}_{\lambda\omega}}{\partial\bar{x}^{\mu}}\bar{x}^{\mu}=0$$

即ち $\bar{g}_{\lambda\omega}$ は $\bar{x}$ の 0次の斉次函数. 故に常数でなければ原点で値が不定になる。後者は仮設に反するから 結局常数となり. 吾々の空間は実はEuklid空間と云ふことになる. 〔証明了〕

終りに臨み. 佐々木重夫、矢野健太郎両先生の御注意に深く感謝の意を表する次第である。 (Mar. 21. 1949)

文 献

[1] W. Rinow und W. Hopf. *Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrische Fläche. 1931. Comm. Math. Helv. vol.3 S209.*

[2] 立花俊一. 「ホロノミー群が一点又は数個の独立な点を不変にするリーマン空間の標準座標とその一次接続集合体への応用について」. ホロノミー群研究 第7号 昭和23年3月10日